HỘI TOÁN HỌC VIỆT NAM ĐỀ THI OLYMPIC TOÁN SINH VIÊN HỌC SINH NĂM 2016

ĐÁP ÁN MÔN: ĐẠI SỐ

Thời gian làm bài: 180 phút

Bảng A

Bài A.1.

(i) Đáp số $a^4 - b^4$.

(ii) Sử dụng công thức Cramer,

$$A^{-1} = (b^4 - a^4)^{-1} \begin{pmatrix} a^3 & a^2b & ab^2 & b^3 \\ b^3 & a^3 & a^2b & ab^2 \\ ab^2 & b^3 & a^3 & a^2b \\ a^2b & ab^2 & b^3 & a^3 \end{pmatrix}.$$

Ký hiệu y_0 là số cây ban đầu công ty quản lý. Ký hiệu y_1, y_2, y_3, y_4 là số cây tương ứng của công ty ở cuối các tháng thứ $1, 2, 3, 4$. Từ giả thiết chúng ta có:

$$y_1 = 0,9y_0 + 100$$

hay là

$$10y_1 - 9y_0 = 1000.$$

Phân tích tương tự ta nhận được

$$10y_2 - 9y_1 = 1.020;\ 10y_3 - 9y_2 = 1.040;\ 10y_4 - 9y_3 = 1.060.$$

Kết hợp với $y_4 = y_0 + 80$ thì phương trình cuối cùng ở trên viết lại được là

$$10y_0 - 9y_3 = 260$$

Vậy ta có hệ phương trình tuyến tính với ma trận cho bởi

$$A = \begin{pmatrix} -9 & 10 & 0 & 0 \\ 0 & -9 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & -9 & 10 \\ 10 & 0 & 0 & -9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.000 \\ 1.020 \\ 1.040 \\ 260 \end{pmatrix}$$

Sử dụng công thức tính ma trận A^{-1} ở câu trên ta tính được

$$y_0 = \frac{729 * 1.000 + 810 * 1.020 + 900 * 1.040 + 1000 * 260}{19 * 181} = 800.$$

Vậy $y_4 = 880$.

Bài A.2.

(i) Ma trận theo cơ sở đã cho là

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & C_{n-1}^{0} \\ 0 & 1 & 2 & \cdots & C_{n-1}^{1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & C_{n-1}^{n-2} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & C_{n-1}^{n-1} \end{bmatrix}$$

(ii) đa thức đặc trưng của Φ có dạng

$$T^n + a_{n-1}T^{n-1} + \ldots + a_0$$

Theo định lý Cayley-Halmilton,

$$\Phi^n + a_{n-1}\Phi^{n-1} + \ldots + a_0 \mathrm{Id} = 0.$$

Nhưng đẳng thức này chính xác nói rằng với mọi $p \in V$ thì

$$p(x+n) + a_{n-1}p(x+n-1) + \cdots + a_0 p(x) = 0.$$

Bài A.3.

(i) $n = 2$: $P_2(x) = 2x^2 - x - 1$ có hai nghiệm thực $x = 1$ và $x = -1/2$.
$n = 3$: $P_3(x) = 3x^3 - x^2 - x - 1 = (x-1)(3x^2 + 2x + 1)$. Từ đó ta thấy, $P_3(x)$ chỉ có duy nhất nghiệm $x = 1$.

(ii) $P_n(x) = (x-1)(nx^{n-1} + (n-1)x^{n-2} + \ldots + 2x + 1)$. Ta sẽ chứng minh đa thức

$$Q(x) := nx^{n-1} + (n-1)x^{n-2} + \ldots + 2x + 1$$

có duy nhất một nghiệm thực $x = a < 0$ nếu n chẵn và không có nghiệm thực nếu n lẻ.

Nhận xét, $Q(x) = R'(x)$, trong đó

$$R(x) = x^n + x^{n-1} + \ldots + 1 = \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1}.$$

Vậy

$$Q(x) = R'(x) = \frac{nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(x-1)^2}$$

Khảo sát đa thức ở tử số: $S(x) = nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1$ ta thấy.

Nếu n lẻ ta thấy $S(x) \geq 0$ với mọi x, dấu bằng xảy ra chỉ khi $x = 1$ (dùng BĐT Cauchy). Tuy nhiên $Q(1) \neq 1$, vậy $Q(x)$ không có nghiệm thực.

Nếu n chẵn, khảo sát hàm số ta thấy $S(x)$ có hai nghiệm, một nghiệm $x = 1$ và một nghiệm $x = a < 0$. Vậy $Q(x)$ có duy nhất nghiệm $x = a < 0$.

Bài A.4.

Xét một hình vuông có diện tích S. Cạnh hình vuông có độ dài là $c = \sqrt{S}$. Khi đó một cạnh hình vuông là cạnh huyền của một tam giác vuông mà hai cạnh góc vuông còn lại là một đường thẳng đứng và một đường ngang. Khi đó $c^2 = a^2 + b^2$ với $a, b \geq 0$ là hai số nguyên, tương ứng với độ dài hai cạnh tam giác vuông đó. Do đó $S = a^2 + b^2$.

(i) $S = 4$: suy ra $a = 2, b = 0$ hoặc $a = 0, b = 2$. Do đó hình vuông có hai cạnh song song với các đường dọc và ngang. Nói riêng, mỗi hình vuông ứng với hai đoạn độ dài 2 trên cột dọc và ngang. Số đoạn như vậy trên một cột ngang hoặc dọc là $16 - 2 = 14$. Số hình vuông diện tích 4 do đó là $N_4 = 14^2 = 196$.

(ii) $S = 25$: Ta có $25 = 0 + 5^2 = 3^2 + 4^2$. Do đó xảy ra hai trường hợp

$$\begin{cases} a = 0, b = 5 \text{ hoặc } a = 5, b = 0; \\ a = 3, b = 4 \text{ hoặc } a = 4, b = 3. \end{cases}$$

Trường hợp thứ nhất, lập luận tương tự như trên suy ra có tất cả $A = (16 - 5)^2 = 121$ hình vuông có các cạnh độ dài 5 và song song với các trục dọc, ngang.

Trường hợp thứ hai, do tính đối xứng nên số hình vuông là $B = 2C$ với C là số hình vuông ứng với trường hợp $a = 3, b = 4$. Một hình vuông như vậy ứng với hai đoạn có độ dài 7 trên các trục dọc và ngang. Số hình như vậy do đó là

$$C = (16 - 7)^2 = 81.$$

Do đó số hình vuông có diện tích 25 trong trường hợp $(a, b) = (3, 4)$ hoặc $(4, 3)$ là

$$B = 2.81 = 162.$$

Vậy tổng số hình vuông có diện tích 25 là $S_{25} = A + B = 283$.

HỘI TOÁN HỌC VIỆT NAM   ĐỀ THI OLYMPIC TOÁN SINH VIÊN HỌC SINH NĂM 2016

ĐÁP ÁN MÔN: ĐẠI SỐ

Thời gian làm bài: 180 phút

Bảng B

Bài B.1.

(i) Đáp số $a^4 - b^4$.

(ii) Sử dụng công thức Cramer,

$$A^{-1} = (b^4 - a^4)^{-1} \begin{pmatrix} a^3 & a^2b & ab^2 & b^3 \\ b^3 & a^3 & a^2b & ab^2 \\ ab^2 & b^3 & a^3 & a^2b \\ a^2b & ab^2 & b^3 & a^3 \end{pmatrix}.$$

(iii) Ký hiệu y_0 là số cây ban đầu công ty quản lý. Ký hiệu y_1, y_2, y_3, y_4 là số cây tương ứng của công ty ở cuối các tháng thứ $1, 2, 3, 4$. Từ giả thiết chúng ta có:

$$y_1 = 0,9y_0 + 100$$

hay là

$$10y_1 - 9y_0 = 1000.$$

Phân tích tương tự ta nhận được

$$10y_2 - 9y_1 = 1.020;\ 10y_3 - 9y_2 = 1.040;\ 10y_4 - 9y_3 = 1.060.$$

Kết hợp với $y_4 = y_0 + 80$ thì phương trình cuối cùng ở trên viết lại được là

$$10y_0 - 9y_3 = 260$$

Vậy ta có hệ phương trình tuyến tính với ma trận cho bởi

$$A = \begin{pmatrix} -9 & 10 & 0 & 0 \\ 0 & -9 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & -9 & 10 \\ 10 & 0 & 0 & -9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.000 \\ 1.020 \\ 1.040 \\ 260 \end{pmatrix}$$

Sử dụng công thức tính ma trận A^{-1} ở câu trên ta tính được

$$y_0 = \frac{729 * 1.000 + 810 * 1.020 + 900 * 1.040 + 1000 * 260}{19 * 181} = 800.$$

Vậy $y_4 = 880$.

Bài B.2.

(i) Dễ thấy ánh xạ D biến hàm hằng vào 0 và ánh xạ T biến một đa thức bất kỳ vào đa thức thức có nghiệm tại 0. Vậy D không là đơn ánh còn T không là toàn ánh.

(ii) Ta có

$$(D \circ T - T \circ D)(p(x)) = D(xp(x)) - xD(p(x)) = p(x) + xp'(x) - xp'(x) = p(x),$$

với mọi $p(x)$.

Vậy ánh xạ $D \circ T - T \circ D$ là song ánh.

Bài B.3.

(i) Ma trận theo cơ sở đã cho là

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & C_n^0 \\ 0 & 0 & 2 & \cdots & C_n^1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & C_n^{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

(ii) Có thể suy ra trực tiếp từ ý (i) (ma trận nhận được là ma trận đường chéo trên chặt).

Cũng có thể sự dụng nhận xét: ánh xạ Φ làm giảm bậc đa thức, từ đó $\Phi^{n+1} = 0$.

(iii) Nhận xét rằng toán tử này giảm bậc của mỗi đa thức khác hằng đi 1 đơn vị. Vậy có thể chọn cơ sở dạng $e_1 = p(x)$ - đa thức bậc n, $e_i = \Phi^{i-1}e_1$.

Có thể chỉ ra ví dụ cụ thể cho cơ sở hoặc chứng minh nhận định trên (xem câu sau).

(iv) Do p là một đa thức, điều kiện $p(a+1) + p(a-1) = 2p(a)$ đúng với mọi a nguyên tương đương với $p(x+1) + p(x-1) = 2p(x)$. Dễ thấy điều kiện này lại tương đương với $p(x) \in \ker \Phi^2$. Sử dụng cơ sở đã cho ở câu (ii) (thậm chí nếu tinh ý có thể sử dụng ma trận tìm được ở câu (i)), ta thấy rằng $\ker \Phi^2$ chính là không gian sinh bởi 2 vectơ đầu tiên, nói cách khác, là các đa thức có bậc ≤ 1.

Cách khác dựa vào lập luận về hạng: dựa vào ma trận đã cho trong (i), ta dễ dàng thấy Φ^2 là một ánh xạ có hạng bằng $n-2$. Từ đó suy ra $\ker\Phi$ có hạng bằng 2. Nhưng hiển nhiên không gian các đa thức bậc ≤ 1 nằm trong $\ker\Phi$. Từ đó có điều cần chứng minh.

Nhận xét. Ta cũng có thể lập luận một cách giải tích như sau: bởi vì p là một đa thức điều kiện $p(a+1)+p(a-1)=2p(a)$, mà ta viết lại thành $p(a)=\frac{1}{2}(p(a+1)+p(a-1))$, đúng với mọi a tương đương với $p(\alpha)=\frac{1}{2}(p(\alpha+\beta)+p(\alpha-\beta))$ $(\forall\alpha,\beta\in\mathbb{R})$. Như vậy p là một hàm số vừa lồi vừa lõm. Điều này chỉ có thể xảy ra khi đồ thị p là một đường thẳng, nói cách khác, khi p là một đa thức bậc ≤ 1!

Bài B.4.

Xét một hình vuông có diện tích S. Cạnh hình vuông có độ dài là $c=\sqrt{S}$. Khi đó một cạnh hình vuông là cạnh huyền của một tam giác vuông mà hai cạnh góc vuông còn lại là một đường thẳng đứng và một đường ngang. Khi đó $c^2=a^2+b^2$ với $a,b\geq 0$ là hai số nguyên, tương ứng với độ dài hai cạnh tam giác vuông đó. Do đó $S=a^2+b^2$.

(i) $S=4$: suy ra $a=2, b=0$ hoặc $a=0, b=2$. Do đó hình vuông có hai cạnh song song với các đường dọc và ngang. Nói riêng, mỗi hình vuông ứng với hai đoạn độ dài 2 trên cột dọc và ngang. Số đoạn như vậy trên một cột ngang hoặc dọc là $16-2=14$. Số hình vuông diện tích 4 do đó là $N_4=14^2=196$.

(ii) $S=25$: Ta có $25=0+5^2=3^2+4^2$. Do đó xảy ra hai trường hợp

$$\begin{cases} a=0, b=5 \text{ hoặc } a=5, b=0; \\ a=3, b=4 \text{ hoặc } a=4, b=3. \end{cases}$$

Trường hợp thứ nhất, lập luận tương tự như trên suy ra có tất cả $A=(16-5)^2=121$ hình vuông có các cạnh độ dài 5 và song song với các trục dọc, ngang.

Trường hợp thứ hai, do tính đối xứng nên số hình vuông là $B=2C$ với C là số hình vuông ứng với trường hợp $a=3, b=4$. Một hình vuông như vậy ứng với hai đoạn có độ dài 7 trên các trục dọc và ngang. Số hình như vậy do đó là

$$C=(16-7)^2=81.$$

Do đó số hình vuông có diện tích 25 trong trường hợp $(a,b)=(3,4)$ hoặc $(4,3)$ là

$$B=2.81=162.$$

Vậy tổng số hình vuông có diện tích 25 là $S_{25}=A+B=283$.

HỘI TOÁN HỌC VIỆT NAM

KỲ THI OLYMPIC TOÁN SINH VIÊN HỌC SINH NĂM 2016
Môn thi: Giải tích
Thời gian làm bài: 180 phút

ĐÁP ÁN

Lời giải bài A.1

Công thức truy hồi được viết lại thành $u_{n+1} = u_n + (u_n - 1)^2$; suy ra dãy số $(u_n)_{n=1}^{\infty}$ đơn điệu không giảm.

2. Nếu dãy hội tụ về ℓ thì $\ell = \ell + (\ell - 1)^2 \Rightarrow \ell = 1$.

1. Vì dãy đơn điệu không giảm nên nếu nó hội tụ về ℓ thì $u_n \leq \ell = 1$ $(\forall n \geq 1)$. Đặc biệt,

$$a^2 - a + 1 = u_2 \leq 1 \Rightarrow 0 \leq a \leq 1.$$

   Đảo lại, cho $0 \leq a \leq 1$. Khi đó, $0 \leq u_1 \leq 1$. Giả sử với $n \geq 1$ nào đó, ta đã có $0 \leq u_n \leq 1$. Suy ra:

$$u_n(u_n - 1) \leq 0 \Rightarrow u_n{}^2 - u_n + 1 \leq 1.$$

   Theo công thức truy hồi, bất đẳng thức cuối này có thể viết được thành $u_{n+1} \leq 1$; vậy, $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 1$. Nguyên lý quy nạp cho ta $0 \leq u_n \leq 1$ với mọi $n \geq 1$.

   Dãy đã cho đơn điệu và bị chặn nên hội tụ.

   Kết luận: các giá trị cần tìm của a là $0 \leq a \leq 1$.

ĐÁP ÁN

Lời giải bài A.2

- Nếu $a, b \in \mathbb{N}^*$ thì ta có ngay:

$$\lim_{n\to\infty} (a\{nb\} + b\{na\}) = 0. \tag{1}$$

- Đảo lại, giả sử đã có (1). Dễ thấy $0 \le \{na\} < \frac{1}{b}(a\{nb\} + b\{na\})$, nên theo định lý về giới hạn kẹp thì (1) kéo theo

$$\lim_{n\to\infty} \{na\} = 0, \text{ và tương tự, } \lim_{n\to\infty} \{nb\} = 0. \tag{2}$$

Đến đây có thể chứng minh $a, b \in \mathbb{N}^*$ theo các cách khác nhau như sau:
Cách 1:

- Giả sử a vô tỉ. Khi đó trong biểu diễn thập phân

$$a = (C, c_1c_2\dots)_{10} = C + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{c_i}{10^i}$$

tồn tại một chữ số $c \neq 0$ xuất hiện vô hạn lần; tức là, tồn tại các chỉ số $i_1 < i_2 < \cdots$ sao cho $c = c_{i_1} = c_{i_2} = \dots$ Xét $n = 10^{i_k - 1} \underset{(k\to\infty)}{\to} \infty$, ta có

$$na = (Cc_1 \dots c_{i_k-1}, c_{i_k} \dots c_{i_{k+1}} \dots)_{10} \Rightarrow \{na\} > (0, c)_{10} = \frac{c}{10} > 0,$$

mâu thuẫn với (2).

- Vậy a hữu tỉ: $a = \frac{p}{q}$ với $p, q \in \mathbb{N}^*$. Xét $n = kq + 1 \underset{(k\to\infty)}{\to} \infty$, ta có $\{na\} = \{kp + a\} = \{a\}$ nên (2) $\Rightarrow \{a\} = 0$. Từ đó, $a \in \mathbb{N}^*$. Tương tự, $b \in \mathbb{N}^*$.

Cách 2:

- Ta sẽ chứng minh rằng $\{a\} = 0$. Giả sử đpcm là sai. Khi đó $0 < \{a\} < 1$. Với $\varepsilon := \min\{1 - \{a\}, \{a\}\} > 0$, theo (2) và định nghĩa của giới hạn, tồn tại $n_0 \in \mathbb{N}^*$ sao cho $0 \le \{na\} < \varepsilon$ với mọi $n \ge n_0$. Đặc biệt,

$$0 \le \{n_0 a\}, \{(n_0 + 1)a\} < \varepsilon. \tag{3}$$

- Lại có

$$\{(n_0 + 1)a\} = \{[a] + \{a\} + [n_0 a] + \{n_0 a\}\} = \{\{a\} + \{n_0 a\}\}. \tag{4}$$

Nhưng $0 < \{a\} \le \{a\} + \{n_0 a\} < \{a\} + \varepsilon \le 1$ nên (3)-(4) kéo theo $\varepsilon > \{(n_0 + 1)a\} = \{a\} + \{n_0 a\} \ge \{a\}$, mâu thuẫn với định nghĩa của ε! Mâu thuẫn đó chứng tỏ rằng $\{a\} = 0$, tức là $a \in \mathbb{N}^*$. Tương tự, ta có $b \in \mathbb{N}^*$.

HỘI TOÁN HỌC VIỆT NAM

KỲ THI OLYMPIC TOÁN SINH VIÊN HỌC SINH NĂM 2016

Môn thi: Giải tích

Thời gian làm bài: 180 phút

ĐÁP ÁN

Lời giải các bài A.3

- Trong điều kiện thứ nhất, chọn $x = 0$ ta thấy $f(0)^2 \leq 0 \Rightarrow f(0) = 0$. Với $x \neq 0$, từ điều kiện này ta cũng có $f(x) \geq \dfrac{f(ax)^2}{a^3x^2} \geq 0$. Vậy, $f(x) \geq 0$ với mọi x.
- Nếu $a = 1$, điều kiện thứ nhất trở thành $f(x)^2 \leq x^2 f(x)$, ta suy ra $f(x) \leq x^2$ với mọi số thực x, nên đpcm là đúng. Bây giờ, xét trường hợp $a > 1$.
- Đặt $g(x) := \dfrac{|f(x)|}{x^2/a} = \dfrac{f(x)}{x^2/a} \geq 0$ với mọi $x \neq 0$. Từ nay, xem $x \neq 0$ và chỉ còn phải chứng minh rằng $g(x) \leq 1$. Theo định nghĩa của g, ta có $f(x) = \dfrac{x^2}{a} g(x)$.
- Từ đó, viết lại theo g điều kiện thứ nhất như sau:

$$\left(\frac{(ax)^2}{a} g(ax)\right)^2 \leq a^3x^2 \frac{x^2}{a} g(x) \Leftrightarrow g(ax)^2 \leq g(x). \tag{1}$$

  Dùng (1), bằng quy nạp theo $n \in \mathbb{N}$, ta thấy:

$$g(x) \leq g\left(\frac{x}{a^n}\right)^{2^{-n}} \qquad \forall n \in \mathbb{N}. \tag{2}$$

- Theo điều kiện thứ hai, tồn tại $m, M \in (0, \infty)$ sao cho $(0 \leq)\ f(t) \leq M$ khi $|t| < m$ (trong bài B2, $m = 1$). Vì $a > 1$ nên cũng tồn tại $n_0 \in \mathbb{N}$ (phụ thuộc vào x) để $\left|\dfrac{x}{a^n}\right| < m$ với mọi $n \geq n_0$; và với các số tự nhiên n như thế, (2) kéo theo

$$g(x) \leq \left(\frac{f\left(\frac{x}{a^n}\right)}{\left(\frac{x}{a^n}\right)^2 / a}\right)^{2^{-n}} \leq \frac{a^{\frac{2n+1}{2^n}}}{x^{2^{1-n}}} M^{2^{-n}}. \tag{3}$$

- Dễ thấy $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n+1}{2^n} = 0$ (có thể dùng quy tắc l'Hospital), nên bằng cách cho $n \to \infty$ trong (3), ta có ngay $g(x) \leq 1$, đpcm.

ĐÁP ÁN

Lời giải bài A.4

1. Nếu $f'(x) > 0$ với mọi $x \geq 0$, thì nói riêng, $f'(0) > 0$, nên điều kiện đầu của bài toán kéo theo $f(0) \geq 0$; nhưng lúc này f tăng ngặt trên $[0, \infty)$ nên điều kiện thứ hai không thể thỏa mãn được.

   Một cách tương tự, nếu $f'(x) < 0$ với mọi $x \geq 0$, thì ta cũng gặp mâu thuẫn. Vậy, $\exists x_1 \geq 0, f'(x_1) = 0$.

   Giả sử với $k \geq 1$ nào đó, ta đã chứng minh được sự tồn tại của k số $0 \leq x_1 < x_2 < \cdots < x_k$ sao cho $f^{(n)}(x_n) = 0$ với mọi số nguyên dương $n \leq k$. Nếu $f^{(k+1)}(x) > 0$ với mọi $x > x_k$, thì $f^{(k)}$ tăng ngặt trên $[x_k, \infty)$; suy ra

   $$f^{(k)}(x) \geq f^{(k)}(x_k + 1) > f^{(k)}(x_k) = 0 \quad \forall x \geq x_k + 1.$$

   Với mỗi $x \geq x_k + 1$, lấy $\int_{x_k+1}^{x} \mathrm{d}t$ hai vế của bất đẳng thức $f^{(k)}(t) \geq f^{(k)}(x_k + 1)$ cả thảy k lần, ta sẽ thu được một bất đẳng thức có dạng

   $$f(x) \geq \frac{f^{(k)}(x_k + 1)}{k!} x^k + \text{một đa thức có bậc bé hơn } k \text{ của biến } x;$$

   vì thế, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$, mâu thuẫn với điều kiện thứ hai.

   Một cách tương tự, nếu $f^{(k+1)}(x) < 0$ với mọi $x > x_k$, thì ta sẽ có $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$, cũng mâu thuẫn với điều kiện thứ hai. Vậy, $\exists x_{k+1} > x_k, f^{(k+1)}(x_{k+1}) = 0$. Nguyên lý quy nạp cho ta kết luận của bài toán.

2. Cuối cùng, một ví dụ về hàm số f thỏa mãn mọi yêu cầu của đề bài, và không đồng nhất bằng 0, được cho chẳng hạn bởi công thức $f(x) = \dfrac{x}{\mathrm{e}^x}$ (điều kiện thứ hai được kiểm tra bằng quy tắc l'Hospital).

ĐÁP ÁN

Lời giải bài A.5

1. Dùng định lý cơ bản của phép tính vi-tích phân (về đạo hàm theo cận của tích phân xác định):

$$f'_\alpha(x) = \frac{\alpha x^{\alpha-1}}{\ln x^\alpha} - \frac{1}{\ln x} = \frac{x^{\alpha-1}-1}{\ln x} \quad \forall x > 1.$$

Vì thế: nếu $\alpha > 1$ thì $f'_\alpha > 0$ nên f_α tăng ngặt trên $I := (1, \infty)$; còn nếu $0 < \alpha < 1$ thì $f'_\alpha < 0$ nên f_α giảm ngặt trên I. Vậy, f_α luôn là một song ánh khả vi (nên liên tục) từ khoảng I lên một khoảng $I_\alpha \subset \mathbb{R}$, là ảnh của f_α. Ánh xạ ngược $g_\alpha := f_\alpha^{-1} : I_\alpha \to I$ cũng khả vi, $g'_\alpha(y) = \dfrac{1}{f'_\alpha(x)}$ với mọi $y = f_\alpha(x) \in I_\alpha$, suy ra f_α là một phép đồng phôi.

2. Để tìm I_α trong trường hợp $\alpha > 1$, ta đánh giá

$$f_\alpha(x) \geq (x^\alpha - x) \min\left\{\frac{1}{\ln t} : x \leq t \leq x^\alpha\right\} = \frac{x^\alpha - x}{\ln x^\alpha} = \frac{x}{\alpha} \cdot \frac{x^{\alpha-1}-1}{\ln x} \underset{(x\to+\infty)}{\to} +\infty \quad (1)$$

(quy tắc l'Hospital).

Đổi biến số $t = \mathrm{e}^u$, ta lại có $f_\alpha(x) = \int_{\ln x}^{\alpha \ln x} \mathrm{e}^u \dfrac{\mathrm{d}u}{u}$. Với mọi $x > 1$, khi $\ln x < u < \alpha \ln x$, ta có $x < \mathrm{e}^u < x^\alpha$, suy ra

$$x \ln \alpha = x \int_{\ln x}^{\alpha \ln x} \frac{\mathrm{d}u}{u} < f_\alpha(x) < x^\alpha \int_{\ln x}^{\alpha \ln x} \frac{\mathrm{d}u}{u} = x^\alpha \ln \alpha \Rightarrow \lim_{x\to 1^+} f_\alpha(x) = \ln \alpha \quad (2)$$

Từ (1)-(2), ta thấy $I_\alpha = (\ln \alpha, +\infty)$.

Để tìm I_α trong trường hợp $0 < \alpha < 1$, ta có thể dùng một trong các cách:

<u>**Cách 1**</u>: Tương tự trường hợp $\alpha > 1$, lần này ta đánh giá

$$f_\alpha(x) \leq -(x - x^\alpha) \min\left\{\frac{1}{\ln t} : x^\alpha \leq t \leq x\right\} = \frac{x^\alpha - x}{\ln x} = x^\alpha \cdot \frac{1 - x^{1-\alpha}}{\ln x} \underset{(x\to+\infty)}{\to} -\infty \quad (3)$$

(quy tắc l'Hospital).

Cũng đổi biến số $t = \mathrm{e}^u$, và để ý: với mọi $x > 1$, khi $\alpha \ln x < u < \ln x$, ta có $x^\alpha < \mathrm{e}^u < x$, suy ra

$$x \ln \alpha = -x \int_{\alpha \ln x}^{\ln x} \frac{\mathrm{d}u}{u} < f_\alpha(x) < -x^\alpha \int_{\alpha \ln x}^{\ln x} \frac{\mathrm{d}u}{u} = x^\alpha \ln \alpha \Rightarrow \lim_{x\to 1^+} f_\alpha(x) = \ln \alpha \quad (4)$$

Từ (3)-(4), ta thấy $I_\alpha = (-\infty, \ln \alpha)$.

<u>**Cách 2**</u>: Ta có $f_\alpha(x) = -f_{\frac{1}{\alpha}}(z)$ với $z := x^\alpha$; mà $\dfrac{1}{\alpha} > 1$, $\lim\limits_{x\to+\infty} z = +\infty$ và $z \to 1^+$ khi $x \to 1^+$ nên dùng chính kết quả của trường hợp đã chứng minh ở trên ta có ngay:

$$\lim_{x\to+\infty} f_\alpha(x) = -\lim_{z\to+\infty} f_{\frac{1}{\alpha}}(z) = -\infty, \quad \lim_{x\to 1^+} f_\alpha(x) = -\lim_{z\to 1^+} f_{\frac{1}{\alpha}}(z) = -\ln(1/\alpha) = \ln \alpha.$$

Suy ra $I_\alpha = (-\infty, \ln \alpha)$.

HỘI TOÁN HỌC VIỆT NAM

KỲ THI OLYMPIC TOÁN SINH VIÊN HỌC SINH NĂM 2016
Môn thi: Giải tích
Thời gian làm bài: 180 phút

ĐÁP ÁN

Lời giải bài B.1

Từ công thức truy hồi ta thấy ngay dãy số $(u_n)_{n=1}^{\infty}$ đơn điệu không giảm.

2. Nếu nó hội tụ về ℓ thì $\ell = \ell + (\ell - 2016)^2 \Rightarrow \ell = 2016$.

1. Vì dãy đơn điệu không giảm nên nếu nó hội tụ về ℓ thì $u_n \leq \ell = 2016$ $(\forall n \geq 1)$. Đặc biệt,

$$a + (a - 2016)^2 = u_2 \leq 2016 \Rightarrow (a - 2016)(a - 2015) \leq 0 \Rightarrow 2015 \leq a \leq 2016.$$

   Đảo lại, cho $2015 \leq a \leq 2016$. Khi đó, $2015 \leq u_1 \leq 2016$. Giả sử với $n \geq 1$ nào đó, ta đã có $2015 \leq u_n \leq 2016$. Suy ra:

$$(u_n - 2016)(u_n - 2016 + 1) \leq 0 \Rightarrow (u_n - 2016)^2 + u_n - 2016 \leq 0.$$

   Theo công thức truy hồi, bất đẳng thức cuối này có thể viết được thành $u_{n+1} \leq 2016$; vậy, $2015 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 2016$. Sử dụng nguyên lý quy nạp ta thu được $2015 \leq u_n \leq 2016$ với mọi $n \geq 1$.

   Dãy đã cho đơn điệu và bị chặn nên hội tụ.

   Kết luận: các giá trị cần tìm của a là $2015 \leq a \leq 2016$.

HỘI TOÁN HỌC VIỆT NAM

KỲ THI OLYMPIC TOÁN SINH VIÊN HỌC SINH NĂM 2016

Môn thi: Giải tích

Thời gian làm bài: 180 phút

ĐÁP ÁN

Lời giải bài B.2

1. Dễ thấy hàm f liên tục trên $(0,1]$ nên f liên tục trên $[0,1]$ khi và chỉ khi nó liên tục (bên phải) tại 0.

   Nếu $\alpha > 0$ thì $\lim\limits_{x\to 0^+} x^\alpha = 0$, nên từ bất đẳng thức $|f(x)| \le x^\alpha$ $(\forall x \in (0,1])$ ta suy ra ngay $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 0 = f(0)$, tức là f liên tục (bên phải) tại điểm 0.

   Đảo lại, vì $x_n := \left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right)^{-1} \underset{(n\to+\infty)}{\longrightarrow} 0^+$ với $\sin\frac{1}{x_n} \equiv 1$, ta thấy nếu f liên tục (bên phải) tại điểm 0 thì phải có $\lim\limits_{n\to+\infty} {x_n}^\alpha = \lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n) = f(0) = 0$. Suy ra $\alpha > 0$.

2. Dễ thấy hàm f khả vi trên $(0,1]$ nên f khả vi trên $[0,1]$ khi và chỉ khi nó có đạo hàm bên phải tại điểm 0.

   Nếu $\alpha > 1$ thì $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0^+} x^{\alpha-1}\sin\frac{1}{x} = 0$ (chính là kết quả của phần 1 vì $\alpha - 1 > 0$), nên f có đạo hàm bên phải $f'_+(0) = 0$.

   Đảo lại, vì $y_n := (2n\pi)^{-1} \underset{(n\to+\infty)}{\longrightarrow} 0^+$ với $\sin\frac{1}{y_n} \equiv 0$, ta thấy nếu f có đạo hàm bên phải tại điểm 0 thì $f'_+(0) = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{f(y_n)-f(0)}{y_n - 0} = 0$.

   Vậy, với x_n như đã nói ở phần 1, ta có $0 = f'_+(0) = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{f(x_n)-f(0)}{x_n-0} = \lim\limits_{n\to+\infty} {x_n}^{\alpha-1}$. Điều này chỉ xảy ra khi $\alpha > 1$.

3. Dễ thấy hàm f khả vi liên tục trên $(0,1]$ với

   $$f'(x) = \alpha x^{\alpha-1}\sin\frac{1}{x} - x^{\alpha-2}\cos\frac{1}{x} \quad \forall x \in (0,1] \tag{1}$$

   nên f khả vi liên tục khi và chỉ khi nó có đạo hàm bên phải $f'_+(0) = 0$ (kết quả của phần 2) và $\lim\limits_{x\to 0^+} f'(x) = f'_+(0)$.

   Nếu $\alpha > 2$ thì

   $$(1) \Rightarrow |f'(x)| \le \alpha x^{\alpha-1} + x^{\alpha-2} \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} 0 \Rightarrow \lim_{x\to 0^+} f'(x) = 0 = f'_+(0).$$

   Đảo lại, với y_n như đã dùng ở phần 2, vì $\cos\frac{1}{y_n} \equiv 1$, ta thấy nếu

   $$\lim_{x\to 0^+} f'(x) = f'_+(0) = 0$$

   thì $0 = -\lim\limits_{n\to+\infty} f'(y_n) = \lim\limits_{n\to+\infty} {y_n}^{\alpha-2}$. Điều này chỉ xảy ra khi $\alpha > 2$.

ĐÁP ÁN

Lời giải bài B.3

- Trong điều kiện thứ nhất, chọn $x = 0$ ta thấy $f(0)^2 \leq 0 \Rightarrow f(0) = 0$. Với $x \neq 0$, từ điều kiện này ta cũng có $f(x) \geq \dfrac{f(ax)^2}{a^3x^2} \geq 0$. Vậy, $f(x) \geq 0$ với mọi x.
- Nếu $a = 1$, điều kiện thứ nhất trở thành $f(x)^2 \leq x^2 f(x)$, ta suy ra $f(x) \leq x^2$ với mọi số thực x, nên đpcm là đúng. Bây giờ, xét trường hợp $a > 1$.
- Đặt $g(x) := \dfrac{|f(x)|}{x^2/a} = \dfrac{f(x)}{x^2/a} \geq 0$ với mọi $x \neq 0$. Từ nay, xem $x \neq 0$ và chỉ còn phải chứng minh rằng $g(x) \leq 1$. Theo định nghĩa của g, ta có $f(x) = \dfrac{x^2}{a} g(x)$.
- Từ đó, viết lại theo g điều kiện thứ nhất như sau:

$$\left(\frac{(ax)^2}{a} g(ax)\right)^2 \leq a^3x^2 \frac{x^2}{a} g(x) \Leftrightarrow g(ax)^2 \leq g(x). \tag{1}$$

  Dùng (1), bằng quy nạp theo $n \in \mathbb{N}$, ta thấy:

$$g(x) \leq g\left(\frac{x}{a^n}\right)^{2^{-n}} \qquad \forall n \in \mathbb{N}. \tag{2}$$

- Theo điều kiện thứ hai, tồn tại $m, M \in (0, \infty)$ sao cho $(0 \leq)\ f(t) \leq M$ khi $|t| < m$ (trong bài B2, $m = 1$). Vì $a > 1$ nên cũng tồn tại $n_0 \in \mathbb{N}$ (phụ thuộc vào x) để $\left|\dfrac{x}{a^n}\right| < m$ với mọi $n \geq n_0$; và với các số tự nhiên n như thế, (2) kéo theo

$$g(x) \leq \left(\frac{f\left(\frac{x}{a^n}\right)}{\left(\frac{x}{a^n}\right)^2 / a}\right)^{2^{-n}} \leq \frac{a^{\frac{2n+1}{2^n}}}{x^{2^{1-n}}} M^{2^{-n}}. \tag{3}$$

- Dễ thấy $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n+1}{2^n} = 0$ (có thể dùng quy tắc l'Hospital), nên bằng cách cho $n \to \infty$ trong (3), ta có ngay $g(x) \leq 1$, đpcm.

ĐÁP ÁN

Lời giải bài B.4

Giả sử phản chứng rằng phương trình $f''(x) = 0$ vô nghiệm. Theo giả thiết, f'' liên tục nên từ đây suy ra: f'' không đổi dấu trên $\mathbb{R}$. Nếu cần, sẽ thay f bởi $-f$, ta có thể xem rằng $f''(x) > 0$ với mọi x.

Lúc này f' tăng ngặt. Nếu tồn tại a để $f'(a) > 0$ thì với mọi $x > a$ ta có

$$f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t)\mathrm{d}t > f(a) + \int_a^x f'(a)\mathrm{d}t = f(a) + f'(a)(x-a);$$

chia hai vế cho $x > \max\{a, 0\}$ rồi lấy $\lim\limits_{x\to+\infty}$, dùng giả thiết ta thấy:

$$0 = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} \geq \lim_{x\to+\infty} \frac{f(a)}{x} + f'(a) \lim_{x\to+\infty} \frac{x-a}{x} = f'(a),$$

vô lý!

Mâu thuẫn đó chứng tỏ rằng $f'(x) \leq 0$ với mọi x. Mà f' tăng ngặt, nên tồn tại b để $f'(b) < 0$. Với mọi $x < b$, ta lại có

$$f(x) = f(b) - \int_x^b f'(t)\mathrm{d}t > f(b) - \int_x^b f'(b)\mathrm{d}t = f(b) + f'(b)(x-b).$$

Chia hai vế của bất đẳng thức này cho $x < \min\{b, 0\}$ rồi lấy $\lim\limits_{x\to-\infty}$, dùng giả thiết ta thấy:

$$0 = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} \leq \lim_{x\to-\infty} \frac{f(b)}{x} + f'(b) \lim_{x\to-\infty} \frac{x-b}{x} = f'(b),$$

cũng vô lý! Tất cả các mâu thuẫn gặp được chứng tỏ rằng phương trình $f''(x) = 0$ phải có ít nhất một nghiệm.

Ghi chú: Thực ra chỉ cần giả thiết f khả vi hai lần (f'' không nhất thiết liên tục). Khi đó, dùng tính chất nhận giá trị trung gian của hàm đạo hàm, ta thấy nếu phương trình $f''(x) = 0$ vô nghiệm thì f'' cũng không đổi dấu trên $\mathbb{R}$.

HỘI TOÁN HỌC VIỆT NAM

KỲ THI OLYMPIC TOÁN SINH VIÊN HỌC SINH NĂM 2016

Môn thi: Giải tích

Thời gian làm bài: 180 phút

ĐÁP ÁN

Lời giải bài B.5

- Dùng định lý cơ bản của phép tính vi-tích phân (về đạo hàm theo cận của tích phân xác định):

$$f'(x) = \frac{1}{\ln x} - \frac{(1/2)x^{-1/2}}{\ln x^{1/2}} = \frac{1 - x^{-1/2}}{\ln x} = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}\ln x} > 0 \quad \forall x > 1$$

nên f tăng ngặt và liên tục trên $I := (1, \infty)$.

- Để tìm tập ảnh J của f, ta đánh giá

$$f(x) \geq (x - \sqrt{x}) \min\left\{\frac{1}{\ln t} : \sqrt{x} \leq t \leq x\right\} = \frac{x - \sqrt{x}}{\ln x} = \sqrt{x} \cdot \frac{\sqrt{x}-1}{\ln x} \underset{(x\to+\infty)}{\longrightarrow} +\infty \quad (1)$$

(quy tắc l'Hospital).

Đổi biến số $t = \mathrm{e}^u$, ta có: $f(x) = \int_{(1/2)\ln x}^{\ln x} \mathrm{e}^u \frac{\mathrm{d}u}{u}$ và để ý: với mọi $x > 1$, khi $(1/2)\ln x < u < \ln x$, thì $\sqrt{x} < \mathrm{e}^u < x$, suy ra

$$\begin{aligned} \sqrt{x}\ln 2 &= \sqrt{x}\int_{(1/2)\ln x}^{\ln x} \frac{\mathrm{d}u}{u} < f(x) < x\int_{(1/2)\ln x}^{\ln x}\frac{\mathrm{d}u}{u} = x\ln 2 \\ &\Rightarrow \lim_{x\to 1^+} f(x) = \ln 2 \end{aligned} \quad (2)$$

Từ (1)-(2), ta thấy $J = (\ln 2, \infty)$.

Ghi chú: để chứng minh (1) ta có thể dùng bất đẳng thức $\mathrm{e}^t \geq 1 + t > t \Rightarrow \ln t < t \Rightarrow \frac{1}{\ln t} > \frac{1}{t}$ với mọi $t > 1$. Vậy, $f(x) > \int_{\sqrt{x}}^{x} \frac{\mathrm{d}t}{t} = \ln\sqrt{x}$. Suy ra (1).