HỘI TOÁN HỌC VIỆT NAM ĐỀ THI OLYMPIC TOÁN SINH VIÊN HỌC SINH NĂM 2016

MÔN THI: ĐẠI SỐ

Thời gian làm bài: 180 phút

Bảng A

Bài A.1. Cho a, b là các số thực và

$$A = \begin{pmatrix} -a & b & 0 & 0 \\ 0 & -a & b & 0 \\ 0 & 0 & -a & b \\ b & 0 & 0 & -a \end{pmatrix}.$$

(i) Tính định thức của A.

(ii) Với các giá trị a, b nào thì A khả nghịch và trong trường hợp đó hãy tính A^{-1}.

(iii) Công ty cây xanh đô thị thực hiện Dự án thay thế các cây già cỗi và cây không đúng chủng loại bởi các cây mới. Công ty thực hiện chương trình trong bốn tháng. Trong mỗi tháng công ty sẽ chặt bỏ 10% tổng số cây xanh trong thành phố tính tới ngày đầu tiên của tháng, đồng thời thực hiện trồng thêm một số cây xanh. Cụ thể trong tháng thứ nhất sẽ trồng thêm 100 cây, tháng thứ hai trồng thêm 102 cây, tháng thứ ba trồng thêm 104 cây, tháng cuối cùng trồng thêm 106 cây. Tại buổi tổng kết Dự án người ta cho biết, tổng số cây hiện tại trong thành phố đã tăng thêm 80 so với trước khi thực hiện Dự án. Hỏi hiện nay thành phố có bao nhiêu cây xanh?

Bài A.2. Ký hiệu V là không gian véc tơ các đa thức có bậc nhỏ hơn n với hệ số thực. Xét ánh xạ tuyến tính

$$\Phi : V \to V, \quad \text{cho bởi} \quad \Phi(p(x)) = p(x+1).$$

(i) Tìm ma trận biểu diễn của Φ theo cơ sở $\{1, x, x^2, \dots, x^{n-1}\}$ của V.

(ii) Chứng minh rằng tồn tại các số thực $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}$ với tính chất sau đây: với mọi đa thức $p(x)$ hệ số thực bậc nhỏ hơn n thì

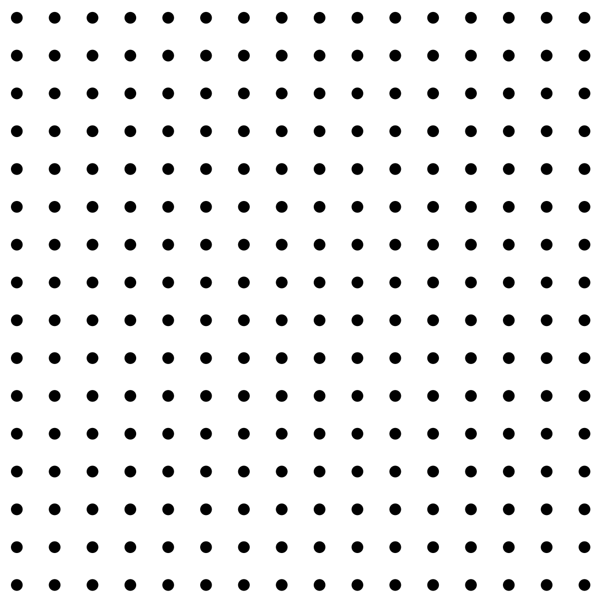
$$p(x+n) + a_{n-1}p(x+n-1) + \dots + a_1 p(x+1) + a_0 p(x) = 0.$$

Bài A.3. Với mỗi số nguyên dương $n \geq 2$ xét đa thức $P_n(x) = nx^n - x^{n-1} - \ldots - x - 1$. Hỏi $P_n(x)$ có bao nhiêu nghiệm thực:

(i) Khi $n = 2, 3$?

(ii) Khi $n \geq 4$?

Bài A.4. Xét mảng 16×16 tạo thành từ các dãy điểm như Hình 1 (khoảng cách giữa các hàng và các cột là 1 đơn vị).



Hình 1. *Mảng* 16×16 *điểm*

(i) Tìm số hình vuông với đỉnh trên mảng và có diện tích bằng 4 (đơn vị diện tích).

(ii) Tìm số hình vuông với đỉnh trên mảng và có diện tích bằng 25 (đơn vị diện tích)?

Hết

Ghi chú: *Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.*

HỘI TOÁN HỌC VIỆT NAM   ĐỀ THI OLYMPIC TOÁN SINH VIÊN HỌC SINH NĂM 2016

ĐỀ THI MÔN: ĐẠI SỐ

Thời gian làm bài: 180 phút

Bảng B

Bài B.1. Cho a, b là các số thực và

$$A = \begin{pmatrix} -a & b & 0 & 0 \\ 0 & -a & b & 0 \\ 0 & 0 & -a & b \\ b & 0 & 0 & -a \end{pmatrix}.$$

(i) Tính định thức của A.

(ii) Với các giá trị a, b nào thì A khả nghịch và trong trường hợp đó hãy tính A^{-1}.

(iii) Công ty cây xanh đô thị thực hiện Dự án thay thế các cây già cỗi và cây không đúng chủng loại bởi các cây mới. Công ty thực hiện chương trình trong bốn tháng. Trong mỗi tháng công ty sẽ chặt bỏ 10% tổng số cây xanh trong thành phố tính tới ngày đầu tiên của tháng, đồng thời thực hiện trồng thêm một số cây xanh. Cụ thể trong tháng thứ nhất sẽ trồng thêm 100 cây, tháng thứ hai trồng thêm 102 cây, tháng thứ ba trồng thêm 104 cây, tháng cuối cùng trồng thêm 106 cây. Tại buổi tổng kết Dự án người ta cho biết, tổng số cây hiện tại trong thành phố đã tăng thêm 80 so với trước khi thực hiện Dự án. Hỏi hiện nay thành phố có bao nhiêu cây xanh?

Bài B.2. Ký hiệu D là phép đạo hàm trên tập các đa thức hệ số thực $\mathbb{R}[x]$ và T là ánh xạ từ $\mathbb{R}[x]$ vào chính nó, cho bởi $T(p(x)) = xp(x)$.

(i) Chứng minh rằng ánh xạ D không là đơn ánh và ánh xạ T không là toàn ánh.

(ii) Chứng minh rằng ánh xạ $D \circ T - T \circ D : \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}[x]$ là song ánh.

Bài B.3. Ký hiệu V là không gian véc tơ các đa thức có bậc nhỏ hơn hoặc bằng n với hệ số thực. Xét ánh xạ tuyến tính

$$\Phi : V \to V, \quad \text{cho bởi} \quad \Phi(p(x)) = p(x+1) - p(x).$$

(i) Tìm ma trận biểu diễn của Φ theo cơ sở $\{1, x, x^2, \dots, x^n\}$ của V.

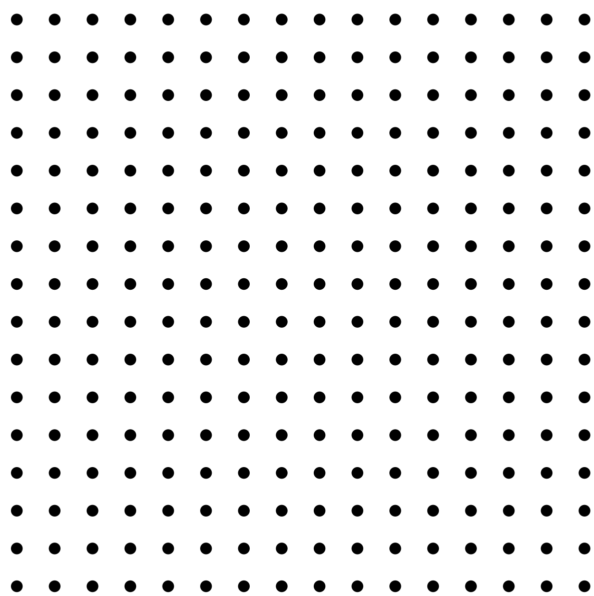
(ii) Chứng minh rằng $\Phi^{n+1} = 0$.

(iii) Tìm một cơ sở để theo đó ma trận của Φ có dạng dưới đây:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

(iv) Xác định tất cả các đa thức p thoả mãn: $p(a+1) + p(a-1) = 2p(a)$ với mọi số nguyên a.

Bài B.4. Xét mảng 16×16 tạo thành từ các dãy điểm như Hình 1 (khoảng cách giữa các hàng và các cột là 1 đơn vị).



Hình 1. *Mảng* 16×16 *điểm*

(i) Tìm số hình vuông với đỉnh trên mảng và có diện tích bằng 4 (đơn vị diện tích).

(ii) Tìm số hình vuông với đỉnh trên mảng và có diện tích bằng 25 (đơn vị diện tích).

Hết

<u>Ghi chú</u>: *Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.*

HỘI TOÁN HỌC VIỆT NAM

ĐỀ THI OLYMPIC TOÁN SINH VIÊN HỌC SINH NĂM 2016
Môn thi: Giải tích
Thời gian làm bài: 180 phút

Bảng A

Bài A.1. Cho $(u_n)_{n=1}^{\infty}$ là dãy số được xác đinh bởi các điều kiện

$$u_1 = a, \; u_{n+1} = {u_n}^2 - u_n + 1 \quad \forall n \geq 1.$$

1. Tìm tất cả các giá trị thực của a để dãy số $(u_n)_{n=1}^{\infty}$ hội tụ.
2. Tìm giới hạn của dãy số đó khi nó hội tụ.

Bài A.2. Phần nguyên của số thực x được định nghĩa là số nguyên lớn nhất không vượt quá x, và được kí hiệu là $[x]$. Hiệu $x - [x]$ được gọi là phần lẻ của x, và được kí hiệu là $\{x\}$.

Giả sử a, b là các số thực dương và n là số tự nhiên. Chứng minh rằng

$$\lim_{n\to\infty} (a\{nb\} + b\{na\}) = 0$$

khi và chỉ khi a và b là các số nguyên.

Bài A.3. Cho $a \geq 1$ là một số thực và $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ là một hàm số thỏa mãn đồng thời hai điều kiện

- $(f(ax))^2 \leq a^3x^2f(x)$ với mọi số thực x;
- f bị chặn trên trong một lân cận nào đó của 0.

Chứng minh rằng $|f(x)| \leq \dfrac{x^2}{a}$ với mọi số thực x.

Bài A.4. Cho $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ là một hàm số khả vi vô hạn lần và thỏa mãn đồng thời hai điều kiện

$$f(0)f'(0) \geq 0, \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = 0.$$

1. Chứng minh rằng tồn tại một dãy số $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ tăng ngặt và không âm sao cho

   $$f^{(n)}(x_n) = 0$$

   với mọi số nguyên dương n (trong đó, $f^{(n)}$ kí hiệu đạo hàm cấp n của f).
2. Tồn tại hay không một hàm số f thỏa mãn mọi yêu cầu của đề bài và không đồng nhất bằng 0?

Bài A.5. Với mỗi số thực $0 < \alpha \neq 1$, gọi f_α là hàm số được xác định trên khoảng $(1, \infty)$ bởi công thức

$$f_\alpha(x) = \int_x^{x^\alpha} \frac{\mathrm{d}t}{\ln t} \quad (\forall x > 1).$$

1. Chứng minh rằng f_α là một phép đồng phôi, tức là một song ánh liên tục, từ khoảng $(1, \infty)$ lên một khoảng $I_\alpha \subset \mathbb{R}$ nào đó sao cho ánh xạ ngược $f_\alpha^{-1} : I_\alpha \to (1, \infty)$ cũng liên tục.
2. Tìm I_α.

HẾT

Ghi chú: *Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.*

HỘI TOÁN HỌC VIỆT NAM **ĐỀ THI OLYMPIC TOÁN SINH VIÊN HỌC SINH NĂM 2016**

Môn thi: Giải tích

Thời gian làm bài: 180 phút

Bảng B

Bài B.1. Cho $(u_n)_{n=1}^{\infty}$ là dãy số được xác đinh bởi các điều kiện

$$u_1 = a,\ u_{n+1} = u_n + (u_n - 2016)^2 \quad \forall n \geq 1.$$

1. Tìm tất cả các giá trị thực của a để dãy số $(u_n)_{n=1}^{\infty}$ hội tụ.
2. Tìm giới hạn của dãy số đó khi nó hội tụ.

Bài B.2. Cho α là một số thực và $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ là hàm số được xác định bởi công thức

$$f(x) = \begin{cases} x^{\alpha} \sin \frac{1}{x} & \text{nếu } x \neq 0, \\ 0 & \text{nếu } x = 0. \end{cases}$$

Chứng minh các khẳng định sau:

1. f liên tục nếu và chỉ nếu $\alpha > 0$.
2. f khả vi nếu và chỉ nếu $\alpha > 1$.
3. f khả vi liên tục nếu và chỉ nếu $\alpha > 2$.

Bài B.3. Cho $a \geq 1$ là một số thực và $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ là một hàm số thỏa mãn đồng thời hai điều kiện

- $(f(ax))^2 \leq a^3 x^2 f(x)$ với mọi số thực x;
- f bị chặn trên trong khoảng $(-1, 1)$.

Chứng minh rằng $|f(x)| \leq \dfrac{x^2}{a}$ với mọi số thực x.

Bài B.4. Giả sử $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ là một hàm số khả vi liên tục hai lần và thỏa mãn điều kiện

$$\lim_{|x| \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0.$$

Chứng minh rằng phương trình $f''(x) = 0$ có ít nhất một nghiệm.

Bài B.5. Cho $f : (1, \infty) \to \mathbb{R}$ là hàm được xác định bởi công thức

$$f(x) = \int_{\sqrt{x}}^{x} \frac{\mathrm{d}t}{\ln t} \quad (\forall x > 1).$$

Hãy tìm tập tất cả các giá trị của f.

HẾT

Ghi chú: *Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.*